



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



ÇİZGE TEORİSİ İLE KARMAŞIK SİSTEMLERİN ZEDELENEBİLİRLİK ANALİZİ: BASKINLIK YAKLAŞIMI

Yüksek Lisans Tezi

Ahmet Çolak

Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

İzmir
2026

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

**ÇİZGE TEORİSİ İLE KARMAŞIK SİSTEMLERİN
ZEDELENEBİLİRLİK ANALİZİ: BASKINLIK YAKLAŞIMI**

Ahmet Çolak

Danışman: Prof. Dr. Aysun Aytaç

Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Matematik

İzmir
2026

Ahmet olak tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “izge Teorisi ile Karmaşık Sistemlerin Zedelenebilirlik Analizi: Baskınlık Yaklaşımı” başlıklı bu alışma E Lisansüstü Eēitim ve ēretim Ynetmeliēi ile E Fen Bilimleri Enstitüsü Eēitim ve ēretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan deēerlendirilerek savunmaya deēer bulunmuş vetarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliēi/oyokluēu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri yeleri

İmza

Jüri Bařkanı :

Raportör ye:

ye :

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Çizge Teorisi ile Karmaşık Sistemlerin Zedelenebilirlik Analizi: Baskınlık Yaklaşımı” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

../../2026

İmzası

Ahmet Çolak

ÖZET

**ÇİZGE TEORİSİ İLE KARMAŞIK SİSTEMLERİN
ZEDELENEBİLİRLİK ANALİZİ: BASKINLIK YAKLAŞIMI**

Ahmet ÇOLAK

Yüksek Lisans Tezi, Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Aysun Aytaç

15.01.2026, 42 sayfa

Çizge teorisinin geniş uygulama alanına sahip baskınlık teorisi kapsamında, bu çalışmada 'Kısıtlı Ayırık Baskınlık' kavramı ele alınmıştır.

Çalışmanın temel amacı, literatürde bilinen bazı çizge operatörleri ve özel çizge aileleri üzerinde kısıtlı ayırık baskınlık sayısını ($\gamma_r^d(G)$) belirlemektir. Bu kapsamda ilk olarak, bir G çizgesinin Orta Çizgesi $M(G)$ ve Merkez Çizgesi $C(G)$ yapıları incelenmiştir. Yol (P_n), Çevre (C_n), Yıldız ($K_{1,n}$), Tekerlek ($W_{1,n}$), Tam (K_n) ve Tam İki Parçalı ($K_{m,n}$) çizgeler gibi temel çizge sınıflarının bu operatörler altındaki dönüşümleri analiz edilmiş ve kısıtlı ayırık baskınlık sayıları için kesin formüller veya sınırlar elde edilmiştir.

Buna ek olarak, kimyasal çizge teorisinde ve moleküler yapıların modellenmesinde önemli bir yere sahip olan altıgen kaktüs zincirleri çalışma kapsamına dahil edilmiştir. Para-altıgen, Meta-altıgen ve Ortho-altıgen zincir yapıları ayrı ayrı ele alınmış; bu yapıların topolojik özellikleri kullanılarak kısıtlı ayırık baskınlık sayıları hesaplanmış ve ilgili teoremler ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, kısıtlı ayırık baskınlık parametresinin yapısal değişimler altındaki davranışını ortaya koymaktadır.

Anahtar sözcükler: Çizge Teorisi, Baskınlık, Ayırık Baskınlık, Kısıtlı Baskınlık, Kısıtlı Ayırık Baskınlık, Orta Çizgeler, Merkezi Çizgeler, Altıgen Kaktüs Zincirleri.

ABSTRACT

Vulnerability Analysis of Complex Systems Using Graph Theory: A Domination Approach

Çolak, Ahmet

M.Sc. in Department of Computer Science

Supervisor: Prof. Dr. Aysun Aytac

15.01.2026, 42 pages

Within the scope of dominance theory, which has a wide range of applications in graph theory, these successful 'Restrained Disjunctive Domination' concepts have been examined.

The main objective of the study is to determine the restrained disjunctive domination number ($\gamma_r^d(G)$) on some graph operators and special graph families known in the literature. In this context, firstly, the Middle Graph ($M(G)$) and Central Graph ($C(G)$) structures of a graph G are examined. The transformations of fundamental graph classes such as Path (P_n), Cycle (C_n), Star ($K_{1,n}$), Wheel (W_n), Complete (K_n), and Complete Bipartite ($K_{m,n}$) graphs under these operators are analyzed, and exact formulas or bounds for their restrained disjunctive domination numbers are obtained.

In addition, hexagonal cactus chains, which have an important place in chemical graph theory and the modeling of molecular structures, are included in the scope of the study. Para-hexagonal, Meta-hexagonal, and Ortho-hexagonal chain structures are handled separately; the restrained disjunctive domination numbers are calculated using the topological properties of these structures, and the related theorems are proved. The obtained results reveal the behavior of the restrained disjunctive domination parameter under structural changes.

Keywords: Graph Theory, Domination, Disjunctive Domination, Restrained Domination, Restrained Disjunctive Domination, Middle Graphs, Central Graphs, Hexagonal Cactus Chains.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü çatısı altında çıktığım ve akademik kimliğimin şekillenmesinde bir dönüm noktası olan bilimsel yolculuğun en somut ürünüdür. Bilgisayar Bilimleri alanında derinleşme arzusuyla başladığım bu süreçte, çalışmalarımı saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aysun Aytaç danışmanlığında yürütme fırsatı bulmuş olmak, benim için yalnızca akademik bir kazanım değil, aynı zamanda büyük bir ayrıcalıktır.

Enstitüye adım attığım ilk günden itibaren hissettiğim destek ve güven ortamı, lisansüstü eğitimimin zorlu virajlarını, öğrenme hevesiyle dolu bir keşif sürecine dönüştürmüştür. Özellikle tez konumun belirlenmesi aşamasında, danışmanımın salt akademik bir yönlendirmeden ziyade, benim kişisel ilgi alanlarımı ve bilimsel merakımı merkeze alan yaklaşımı, bu çalışmayı içselleştirmemde kilit rol oynamıştır. Kendisinin vizyonu ve rehberliği, ilgi duyduğum alanlarda özgürce çalışabilmemin önünü açmış ve araştırmamı büyük bir motivasyonla sürdürmemi sağlamıştır.

Bu çalışma, bir öğrencinin literatüre sunduğu katkıdan öte, Ege Üniversitesi'nin köklü akademik ikliminde filizlenen ve değerli hocamın rehberliğiyle yön bulan bilimsel serüvenimin ilk adımıdır.

İZMİR

../../2026

Ahmet Çolak

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ II	xvi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
3 ORTA ÇİZGELERDE KISITLI AYRIK BASKINLIK	11
4 MERKEZİ ÇİZGELERİN KISITLI AYRIK BASKINLIK SAYISI	20
5 ALTİGEN KAKTÜS ZİNCİRLERİNDE KISITLI AYRIK BASKINLIK SAYISI	29
6 ALGORİTMA	36
7 SONUÇ	38
KAYNAKLAR DİZİNİ	39
TEŞEKKÜR	41
ÖZGEÇMİŞ	42

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 P_{15} Yol Çizgesi	5
2.2 C_6 Çevre Çizgesi	5
2.3 $W_{1,6}$ Tekerlek Çizgesi	6
2.4 $K_{1,5}$ Yıldız Çizgesi	6
2.5 K_7 Tam Çizgesi	6
2.6 $K_{3,4}$ İki Parçalı Tam Çizgesi	7
2.7 P_6 Çizgesi	10
3.1 P_5 Yol Çizgesi	11
3.2 $M(P_5)$ Yol Orta Çizgesi	11
3.3	14
4.1 Farklı Çizgelerin Merkezi Çizge Gösterimleri	20
5.2 L_n Etiketli Çizgesi	31
5.3 M_n Etiketli Çizgesi	33

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
G	Çizge
$\deg_G(v)$	Çizgede bulunan v tepesinin derecesi
$d_G(u, v)$	G çizgesindeki u ve v tepeleri arasındaki mesafe
$N(v)$	v tepesinin komşu tepeler kümesi
$N[v]$	v tepesinin kendisi dahil komşu tepeker kümesi
$N_2(v)$	v tepesinin 2 uzaklıkta bulunan tepeler kümesi
$N_{\leq 2}(v)$	v tepesinin 2 veya daha az uzaklıkta bulunan tepeler kümesi
$diam(G)$	G çizgesinin çapı
$M(G)$	G çizgesinin orta çizgesi
$C(G)$	G çizgesinin merkezi çizgesi
L_n	n bloğa sahip <i>Para-altıgen kaktüs zincir</i> çizgesi
M_n	n bloğa sahip <i>Meta-altıgen kaktüs zincir</i> çizgesi
O_n	n bloğa sahip <i>Ortho-altıgen kaktüs zincir</i> çizgesi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ II

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\gamma(G)$	G çizgesinin baskınlık sayısı
$\gamma_r(G)$	G çizgesinin kısıtlanmış baskınlık sayısı
$\gamma^d(G)$	G çizgesinin ayrık baskınlık sayısı
$\gamma_r^d(G)$	G çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı
RDD -küme	Bir çizgenin herhangi bir kısıtlı ayrık baskınlık kümesi
γ_r^d -küme	G çizgesinin en küçük elemana sahip herhangi bir kısıtlı ayrık baskınlık kümesi
$\delta(G)$	G çizgesinin en küçük tepe derecesi
$\Delta(G)$	G çizgesinin en büyük tepe derecesi

1 GİRİŞ

Günümüz dünyası, iç içe geçmiş ve dinamik karmaşık ağ yapıları ile örülmüş durumdadır. İnternet omurgasından küresel ticaret yollarına, sosyal medya etkileşimlerinden hücresel sinyal iletim mekanizmalarına kadar, yaşamımızın her yönü bir ağ formunda kendini gösterir. Bu evrensel yapı, matematik, istatistik, fizik ve bilgisayar bilimlerini bir araya getiren multidisipliner bir araştırma alanı olan Ağ Bilimi'nin yükselişine zemin hazırlamıştır. Ağ Bilimi, karmaşık sistemlerin altında yatan ortak topolojik yasaları ve dinamikleri ortaya çıkarmayı; ağdaki kritik tepeleri, kümeleşmeleri ve dayanıklılık/zayıflık dengesini belirleyen bağlantı ilkelerini anlamayı hedefler. Bu tür analizler, salgınların yayılımını sınırlamaktan finansal sistemlerdeki riskleri modellemeye kadar pek çok somut probleme doğrudan katkı sunar.

Matematiksel açıdan bakıldığında, bu ağlar bir çizge modeli üzerinden temsil edilebilir: tepeler sistemi oluşturan birimleri, ayrıtlar ise bu birimler arasındaki ilişkiyi ifade eder. Karmaşık verilerin çizge formuna indirgenmesi, yapısal özelliklerin nicel biçimde incelenmesine olanak tanır; bağlantılılık, merkezilik ve kümeleşme gibi ölçütler bu noktada temel araçlardır [Ore, 1962, Cockayne & Hedetniemi, 1977, Hamada & Yoshimura, 1976, Buckley & Harary, 1990, Newman, 2010]. Özellikle “kontrol etme”, “gözetleme” ya da “etki alanı oluşturma” fikrini merkezine alan parametreler, çizge teorisinin önemli bir çalışma sahası olan baskınlık kuramı altında toplanır.

Baskınlık kuramı, bir çizgede seçilen belirli bir tepe kümesinin tüm çizgeyi ne ölçüde kapsayabildiğini inceler. Klasik baskınlığın yanı sıra toplam, yarı-toplam, kısıtlı baskınlık, ayrık baskınlık ve kısıtlı ayrık baskınlık gibi farklı tanımlar; gerçek sistemlerde “kapsama” ihtiyacının farklı koşullar altında nasıl değiştiğini modellemek için geliştirilmiştir [Haynes et al., 1998, Domke et al., 1999, Goddard et al., 2014, Malalay & Jamil, 2022]. Bu tez çalışmasında ise, bu aile içinde yer alan ve hem kapsama hem de yapısal kısıtları aynı anda dikkate alan kısıtlı ayrık baskınlık yaklaşımı ele alınacaktır.

Ağ modelleri yalnızca sosyal ya da teknolojik sistemlerle sınırlı değildir; kimyasal ve biyolojik yapılarda da doğal bir temsil aracıdır. Kimyasal bağların çizge olarak modellendiği bu bağlamda, özellikle karbon temelli halkasal yapıların düzeni dikkat çekicidir. Bu noktada kaktüs zincirler (kaktüs çizgeleri), halkaların birbirleriyle en fazla bir ortak tepe üzerinden bağlandığı özel bir sınıf olarak öne çıkar [Turacı, 2018]. Böyle yapılar, polimer kimyası ve moleküler tasarım süreçlerinde stabilite ve reaktiviteyi anlamaya yönelik topolojik bir çerçeve sunar; potansiyel ilaç adaylarının ya da yeni malzemelerin yapısal özelliklerini analiz etmede yararlı bir modelleme dili sağlar. Bu yapıların önemi dolayısıyla, literatürde altıgen ve diğer çokgen kaktüs zincirleri üzerine yapılan çeşitli baskınlık çalışmaları mevcuttur. Örneğin, [Bermudo et al., 2022] altıgen sistemlerde k -baskınlık sayılarını incelemiştir; [Majstorović et al., 2016] m -kaktüs zincirlerinin baskınlık sayıları üzerine çalışmıştır. Benzer şekilde, beşgen kaktüs zincirleri üzerine [Mihajlov Carević, 2022] tarafından önemli bulgular elde edilmiştir. Ayrıca kaktüs çizgelerinde toplam ve kısıtlı baskınlık türleri de [Mojdeh et al., 2018] tarafından detaylıca ele alınmıştır.

Bu tezde ele alınan bir diğer önemli bakış açısı, çizgelerin belirli dönüşümler altında incelenmesidir. Çizge teorisinde orta çizge (middle graph) dönüşümü, tepelerle birlikte ayrıtları da yeni tepelere dönüştürerek, “bağlantıların” yapısal rolünü doğrudan analizin parçası hâline getirir [Hamada & Yoshimura, 1976]. Böylece yalnızca hangi tepelerin kritik olduğu değil, hangi bağlantıların ağı kontrolü ve işleyişi açısından belirleyici olduğu daha açık biçimde görülebilir. Bu özellik, baskınlık temelli problemlerde kapsamanın tepe düzeyinin ötesine taşınmasına; gözetimin aynı zamanda bağlantı davranışı üzerinden de yorumlanmasına imkân verir.

Merkezi çizge (central graph) dönüşümü ise komşuluk yapısını farklı bir düzlemde yeniden kurgulayarak, ağı erişilebilirlik ve kapsama davranışlarını daha ayırt edici bir biçimde ortaya çıkarır [Vernold Vivin & Venkatakrishnan, 2008]. Bu dönüşüm sayesinde, doğrudan komşulukla sınırlı kalmayan etkileşimlerin topolojik karşılığı daha görünür hâle gelir; dolaylı kontrol,

alternatif erişim yolları ve yapısal dayanıklılık gibi kavramlar baskınlık bakış açısıyla daha net biçimde tartışılabilir. Dolayısıyla merkezi çizge, “küçük bir tepe kümesinin” tüm yapıyı güvenilir biçimde ne ölçüde kontrol edebileceğini farklı bir dönüşüm altında karşılaştırmalı incelemek için elverişli bir zemin sunar.

Sonuç olarak, orta ve merkezi çizge dönüşümleri; ağın tepe–ayrıt etkileşimini zenginleştirmeleri, kontrol ve kapsama kavramlarını farklı topolojik pencere-lerden ölçülebilir kılmaları ve baskınlık ailesindeki problemlere yeni bir analiz sahası açmaları bakımından önemlidir. Bu önem doğrultusunda, kimyasal açıdan anlamlı bir sınıf olan kaktüs zincirler üzerinde kısıtlı ayrık baskınlık yaklaşımını, bu dönüşümlerle birlikte ele almak; hem kuramsal hem de uygulamalı açıdan güçlü bir çerçeve sunmaktadır. İşte bu gerekçeler, bu tez çalışmamızın temel motivasyonunu oluşturmaktadır.

Tezin 2. bölümünde, çalışma boyunca kullanılacak temel kavram ve tanımlar verilmiştir. 3. bölümde orta çizgeler üzerinde kısıtlı ayrık baskınlık sayısına ilişkin teoremler ortaya konulmuş ve ispatları sunulmuştur. 4. bölümde merkezi çizgeler için kısıtlı ayrık baskınlık sayısına dair teoremler oluşturulmuş ve ispatlanmıştır. Bir sonraki, 5. bölümde para, meta ve ortho kaktüs çizgeleri üzerinde durularak, bu yapıların kısıtlı ayrık baskınlık sayılarına ilişkin tanımlar verilmiş ve ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte sunulmuştur. Son bölüm, 6. Bölümde ise birleştirilmiş bir çizgenin kısıtlı ayrık baskınlık sayısını belirlemekte kullanılan algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritmanın çalışma mantığı ve karmaşıklık notasyonları olan O ve O^* verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, teoremlerin ispatında kullanılacak bazı temel tanımlar verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan notasyon ve çizge teorisi terminolojisi için genel olarak [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] esas alınmıştır

Çizgeler, tepeler ve bu tepeleri birbirine bağlayan ayrıtlardan oluşan yapılardır. Bir G çizgesinin her tepe çifti arasında en az bir yol var ise, G çizgesine birleştirilmiş çizge denir. Bir çizgedeki herhangi bir tepenin bağlı olduğu diğer tepelerin sayısı, o tepenin derecesi olarak adlandırılır ve $\deg_G(v)$ ile gösterilir. İzole tepe, bir G çizgesinde derecesi sıfır olan tepelerdir. Çizgede derecesi 1 olan tepe, uç (pendant) tepe olarak adlandırılır. En az bir uç tepeye komşu olan tepeye destek (support) tepe denir. Bir G çizgesinin tüm tepelerinin dereceleri içerisinde en küçük olan tepe derecesine G çizgesinin en küçük tepe derecesi, en büyük olan tepe derecesine G çizgesinin en büyük tepe derecesi denir ve sırasıyla $\delta(G)$ ile ve $\Delta(G)$ ile gösterilir. Eğer, çizgede herhangi bir v tepesi ve ona bağlı olan ayrıtlar silindiğinde, çizgenin bileşen sayısı artıyorsa yani artık birleştirilmemiş bir çizge oluyorsa, o tepeye kesim tepe (cut-vertex) denir.

Bir G çizgesinde $v \in V(G)$ olmak üzere v tepesinin komşuluğu veya açık komşuluğu $N(v)$ veya $N_G(v)$ şeklinde gösterilir ve $N_G(v) = \{ u \in V(G) \mid uv \in E(G) \}$ şeklinde tanımlanır. Eğer v tepesinin kendisi de bu kümeye dahil edilirse kapalı komşuluk elde edilir ve $N[v]$ ile gösterilir.

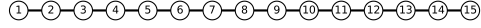
Bir G çizgesinde herhangi iki tepe arasındaki en kısa yolda bulunan ayrıt sayısına iki tepe arasındaki uzaklık denir. $u, v \in V(G)$ olmak üzere G çizgesinde u ve v tepeleri arasındaki uzaklık $d_G(u, v)$ veya $d(u, v)$ ile gösterilir. Buna bağlı olarak, bir v tepesine olan uzaklığı tam olarak 2 olan tepelerin oluşturduğu küme, o tepenin 2-komşuluğu (ikinci dereceden komşuluğu) olarak adlandırılır ve $N_2(v)$ ile gösterilir. Benzer şekilde v tepesine olan uzaklıkları 2 veya 1 olan tepelerin oluşturduğu küme $N_{\leq 2}(v)$ ile gösterilir.

G birleştirilmiş bir çizge ve $v \in V(G)$ olmak üzere v tepesinin açıklık değeri $e(v)$ veya $e_G(v)$ ile gösterilir ve $e(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V(G)\}$ olarak tanımlanır. Bir çizgesinin çapı $diam(G)$ ile gösterilir ve $diam(G) = \max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

$F \subseteq E(G)$ olsun. Eğer G çizgesinin her tepesi F kümesinin bazı ayrıtlarının uç tepesi ise, o zaman F kümesine G çizgesinin ayrıt örtü kümesi denir. Ayrıt örtü kümeleri arasından en az elemanlı kümenin eleman sayısına, çizgenin ayrıt örtü sayısı adı verilir ve $\rho(G)$ ile gösterilir.

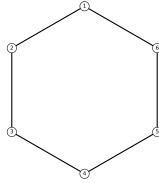
Ayrıca, bir G çizgesinin ayrıtlarının tepe olarak kabul edildiği ve G içinde ortak bir uca sahip olan (kesişen) iki ayrıtın yeni yapıda komşu tepe olarak tanımlandığı çizgeye, G 'nin çizgi çizgesi (line graph) denir ve $L(G)$ ile gösterilir. Ağaç, çevre içermeyen birleştirilmiş bir çizgedir.

Tanım 2.1. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] *Yol Çizgesi P_n , tepe derecesi 1 olan iki tepeye ve tepe derecesi 2 olan $n - 2$ tepeye sahip bir ağaçtır. Şekil 2.1'de bir P_{15} yol çizgesi gösterilmiştir.*



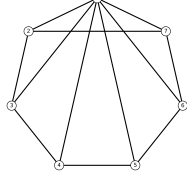
Şekil 2.1: P_{15} Yol Çizgesi

Tanım 2.2. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] *Çevre çizgesi C_n , n tepeli ve n ayrıtlı ve tüm tepe dereceleri 2 olan bir çizgedir. Şekil 2.2'de C_6 çevre çizgesi gösterilmiştir.*



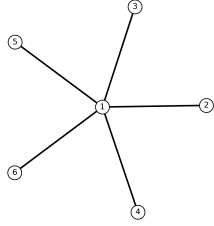
Şekil 2.2: C_6 Çevre Çizgesi

Tanım 2.3. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] Tekerlek çizgesi, tek bir tepenin C_n çevre çizgesinin tüm tepeleri ile toplanması ile oluşturulan $n + 1$ tepeli bir çizgedir. $W_{1,n}$ şeklinde gösterilir. Şekil 2.3'te $W_{1,6}$ tekerlek çizgesi gösterilmiştir.



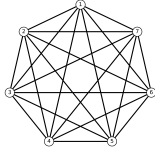
Şekil 2.3: $W_{1,6}$ Tekerlek Çizgesi

Tanım 2.4. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] Yıldız çizge $K_{1,n}$, bir tepenin tepe derecesi n ve diğerinin tepe derecesi 1 olan bir ağaçtır. Şekil 2.4'te $K_{1,5}$ yıldız çizgesi gösterilmiştir.



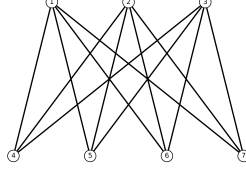
Şekil 2.4: $K_{1,5}$ Yıldız Çizgesi

Tanım 2.5. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] Bir G çizgesindeki her tepe kendisi dışındaki tüm tepelere komşu ise, bu çizgeye tam çizge adı verilir. n adet tepeli bir tam çizge K_n ile gösterilir. Şekil 2.5'de K_7 tam çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 2.5: K_7 Tam Çizgesi

Tanım 2.6. [Buckley & Harary, 1990, Ore, 1962] Bir G çizgesinin tepeler kümesi $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olacak şekilde $V = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. E ayrıtlar kümesinin her bir uv ayrıtı $\forall u \in V_1$ ve $\forall v \in V_2$ den oluşuyorsa G çizgesi iki parçalı tam çizge olarak adlandırılır ve $K_{m,n}$ olarak gösterilir. Şekil 2.6'da $K_{3,4}$ iki parçalı tam çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 2.6: $K_{3,4}$ İki Parçalı Tam Çizgesi

Tanım 2.7. [Haynes et al., 2021] $G = (V, E)$ bir çizge olsun. $D \subseteq V$ olmak üzere; eğer $V - D$ kümesindeki her v tepesi için D kümesinde v 'ye komşu en az bir tepe bulunuyorsa, D kümesi G 'nin bir baskın kümesi olarak adlandırılır. En küçük eleman sayısına sahip kümenin eleman sayısı o çizgenin baskınlık sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. [Goddard et al., 2014, Jamil & Malalay, 2019] $G = (V, E)$ birleştirilmiş bir çizge olsun. Bir $S \subseteq V(G)$ kümesi $\forall v \in V - S$ için:

- v 'nin S 'de bir komşusu ya da
- v 'den uzaklığı 2 olan en az iki tepe S 'de olmalıdır.

Bu durumda S bir ayrık baskınlık kümesidir. Böyle bir kümenin minimum kardinalitesi, G 'nin ayrık baskınlık sayısı $\gamma^d(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. [Malalay & Jamil, 2022] $G = (V, E)$ 'nin izole tepelerden oluşmayan bir birleştirilmiş çizge olsun. $S \subseteq V$ kümesi için, eğer S , G 'nin baskın bir kümesiyse ve $V - S$ 'deki her tepe $V - S$ 'deki başka bir tepe ile komşuysa, S 'ye G 'nin kısıtlanmış baskın kümesi denir. Kısıtlanmış baskın kümenin minimum kardinalitesi, G 'nin kısıtlanmış baskınlık sayısıdır ve $\gamma_r(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. [Malalay & Jamil, 2022] $G = (V, E)$, izole tepe içermeyen birleştirilmiş bir çizge olsun. $S \subseteq V$ kümesi, G 'nin bir ayrık baskın kümesi olmak üzere; eğer her $v \in V - S$ tepesi için,

- $uv \in E$ olacak şekilde en az bir $u \in V - S$ tepesi varsa, veya
- $d_G(u, v) = 2$ ve $d_G(w, v) = 2$ olacak şekilde iki farklı $u, w \in V - S$ tepesi bulunuyorsa,

S kümesi, G 'nin bir kısıtlı ayrık baskın kümesi *RDD-kümesi* (restrained disjunctive dominating set) olarak tanımlanır. G çizgesinin kısıtlı ayrık baskın kümeleri arasından minimum kardinaliteye sahip olanın eleman sayısına ise kısıtlı ayrık baskınlık sayısı denir ve $\gamma_r^d(G)$ ile gösterilir.

Aşağıda, tez çalışmamızın temelini oluşturan P_n , C_n , K_n , $K_{m,n}$ ve $W_{1,n}$ gibi temel çizge sınıfları için literatürde daha önce elde edilmiş baskınlık, kısıtlı baskınlık ve ayrık baskınlık sayısı değerleri sunulmuştur [Haynes et al., 1998].

Teorem 2.1. $n \geq 3$ olmak üzere, P_n yol çizgesi ve C_n çevre çizgesi için baskınlık sayıları şöyledir:

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Teorem 2.2. $n \geq 1$ için K_n tam çizgesinin baskınlık sayısı:

$$\gamma(K_n) = 1$$

Teorem 2.3. $2 \leq m \leq n$ olmak üzere, $K_{m,n}$ tam iki parçalı çizgesinin baskınlık sayısı:

$$\gamma(K_{m,n}) = 2$$

Teorem 2.4. $n \geq 3$ olmak üzere, $W_{1,n}$ tekerlek çizgesinin (merkez tepe dahil $n + 1$ tepeli) baskınlık sayısı:

$$\gamma(W_{1,n}) = 1$$

Ayrık baskınlık (disjunctive domination) $\gamma^d(G)$ parametresi için Goddard ve arkadaşlarının sunduğu temel teoremler şöyledir [Goddard et al., 2014, Jamil & Malalay, 2019].

Teorem 2.5. n tepeli bir yol çizgesi P_n için ayrık baskınlık sayısı:

$$\gamma^d(P_n) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \quad (n \geq 4 \text{ için})$$

Teorem 2.6. n tepeli bir çevre çizgesi C_n için ayrık baskınlık sayısı:

$$\gamma^d(C_n) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

Teorem 2.7. K_n tam çizgesi ve $K_{1,n}$ yıldız çizgesi için ayrık baskınlık sayıları:

$$\gamma^d(K_n) = 1 \quad \text{ve} \quad \gamma^d(K_{1,n}) = 1$$

Teorem 2.8. $2 \leq m \leq n$ olmak üzere, $K_{m,n}$ tam iki parçalı çizgesinin ayrık baskınlık sayısı:

$$\gamma^d(K_{m,n}) = 2$$

Kısıtlı baskınlık (restrained domination) $\gamma_r(G)$ parametresi için Domke ve arkadaşlarının elde ettiği bazı sonuçlar şunlardır [Domke et al., 1999].

Teorem 2.9. $n \geq 1$ için yol (P_n) ve çevre (C_n) çizgelerinin kısıtlı baskınlık sayıları:

$$\begin{aligned} \gamma_r(P_n) &= \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \\ \gamma_r(C_n) &= n - 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \end{aligned}$$

Teorem 2.10. $n \geq 2$ için K_n tam çizgesinin kısıtlı baskınlık sayısı:

$$\gamma_r(K_n) = 1$$

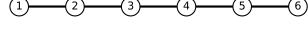
Teorem 2.11. [Malalay & Jamil, 2022] $n \neq 3$ ve $n \geq 1$ olacak şekilde P_n yol çizgesi için $\gamma_r^d(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 1$ 'dir.

Teorem 2.12. [Malalay & Jamil, 2022] $n \geq 5$ tepeli C_n çizgesi için $\gamma_r^d(C_n) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ 'dir.

Teorem 2.13. [Malalay & Jamil, 2022] $n \geq 3$ için G birleştirilmiş bir çizge olsun. O halde;

(i) $\gamma_r^d(G) \leq n - \Delta(G)$, $\Delta(G) \geq 3$ olmasını sağlar.

(ii) $\gamma_r^d(G) = 1$ 'dir ancak ve ancak $n \geq 3$ için $G \neq P_3$ ve $\gamma(G) = 1$ ise.

Şekil 2.7: P_6 Çizgesi

Tablo 2.1’de Şekil 2.7’de gösterilen P_6 çizgesine ait baskınlık kümeleri, ayrık baskınlık kümeleri, kısıtlı baskınlık kümeleri ve kısıtlı ayrık baskınlık kümelerinin tamamı ve en küçük değerleri verilmiştir.

Tablo 2.1: P_6 Çizgesi İçin Baskınlık Kümeleri ve Sayıları

Baskınlık Kümeleri	Ayrık Baskınlık Kümeleri	Kısıtlı Baskınlık Kümeleri	Kısıtlı Ayrık Baskınlık Kümeleri
Tüm Kümeler: {2, 5} {1, 2, 5} {1, 3, 5} {1, 3, 6} {1, 4, 5} {1, 4, 6} {2, 3, 5} {2, 3, 6} {2, 4, 5} {2, 4, 6} {2, 5, 6} {1, 2, 3, 5} {1, 2, 3, 6} {1, 2, 4, 5} {1, 2, 4, 6} {1, 2, 5, 6} {1, 3, 4, 5} {1, 3, 4, 6} {1, 3, 5, 6} {1, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5} {2, 3, 4, 6} {2, 3, 5, 6} {2, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5} {1, 2, 3, 4, 6} {1, 2, 3, 5, 6} {1, 2, 4, 5, 6} {1, 3, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5, 6}	Tüm Kümeler: {1, 5} {2, 5} {2, 6} {1, 2, 5} {1, 2, 6} {1, 3, 5} {1, 3, 6} {1, 4, 5} {1, 4, 6} {1, 5, 6} {2, 3, 5} {2, 3, 6} {2, 4, 5} {2, 4, 6} {2, 5, 6} {1, 2, 3, 5} {1, 2, 3, 6} {1, 2, 4, 5} {1, 2, 4, 6} {1, 2, 5, 6} {1, 3, 4, 5} {1, 3, 4, 6} {1, 3, 5, 6} {1, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5} {2, 3, 4, 6} {2, 3, 5, 6} {2, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5} {1, 2, 3, 4, 6} {1, 2, 3, 5, 6} {1, 2, 4, 5, 6} {1, 3, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5, 6}	Tüm Kümeler: {1, 2, 3, 6} {1, 2, 5, 6} {1, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5, 6}	Tüm Kümeler: {1, 5} {2, 5} {2, 6} {1, 2, 5} {1, 2, 6} {1, 3, 5} {1, 3, 6} {1, 4, 5} {1, 4, 6} {1, 5, 6} {2, 3, 5} {2, 3, 6} {2, 4, 5} {2, 4, 6} {2, 5, 6} {1, 2, 3, 5} {1, 2, 3, 6} {1, 2, 4, 5} {1, 2, 4, 6} {1, 2, 5, 6} {1, 3, 4, 5} {1, 3, 4, 6} {1, 3, 5, 6} {1, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5} {2, 3, 4, 6} {2, 3, 5, 6} {2, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5} {1, 2, 3, 4, 6} {1, 2, 3, 5, 6} {1, 2, 4, 5, 6} {1, 3, 4, 5, 6} {2, 3, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
En Küçük ($\gamma(P_6) = 2$): {2, 5}	En Küçük ($\gamma^d(P_6) = 2$): {1, 5} {2, 5} {2, 6}	En Küçük ($\gamma_r(P_6) = 4$): {1, 2, 3, 6} {1, 2, 5, 6} {1, 4, 5, 6}	En Küçük ($\gamma_r^d(P_6) = 3$): {1, 2, 6} {1, 5, 6}

3 ORTA ÇİZGELERDE KISITLI AYRIK BASKINLIK

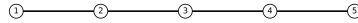
Bu bölümde orta çizgenin tanımı verilmiştir ve bazı bilinen çizgelerin orta çizgeleri oluşturulup kısıtlı ayrik baskınlık değeri hesaplanmıştır.

Tanım 3.1. [Hamada & Yoshimura, 1976] Bir $G = (V, E)$ çizgesi için $M(G)$ orta çizgesi:

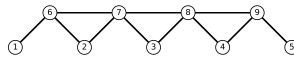
- $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$,
- $x, y \in E(G)$ komşu ayrıtlara karşılık geliyorsa $xy \in E(M(G))$,
- $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ ve x ile y incident (ilişkili) ise $xy \in E(M(G))$.

$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olarak belirleyelim, o zaman $V(M(G)) = V(G) \cup \mathcal{M}$ olur, burada $\mathcal{M} = \{m_{ij} | v_i v_j \in E(G)\}$ ve $E(M(G)) = \{v_i m_{ij}, v_j m_{ij} | v_i v_j \in E(G)\} \cup E(L(G))$ olur.

Karışıklığı önlemek için, $V(M(G))$ ve $E(M(G))$ için standart bir gösterim belirliyoruz. $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olarak sabitlersek, $V(M(G)) = V(G) \cup \mathcal{M}$ olur; burada $\mathcal{M} = \{m_{ij} | v_i v_j \in E(G)\}$ ve $E(M(G)) = \{v_i m_{ij}, v_j m_{ij} | v_i v_j \in E(G)\} \cup E(L(G))$ 'dir. Şekil 3.1'de P_5 yol çizgesi ve Şekil 3.2'de ise bu yol çizgesinin orta çizgesi olan $M(P_5)$ çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 3.1: P_5 Yol Çizgesi



Şekil 3.2: $M(P_5)$ Yol Orta Çizgesi

Lemma 3.1. $n \geq 3$ için G birleştirilmiş bir çizge olsun ve S , $M(G)$ 'nin bir RDD-kümesi olsun. O zaman, $|S'| \leq |S|$ olacak şekilde $M(G)$ 'nin bir RDD-kümesi $S' \subseteq \mathcal{M}$ vardır.

İspat: Eğer $S \subseteq \mathcal{M}$ ise, o zaman $S' = S$ 'dir. Kabul edelim ki, $\exists v \in S \cap V(G)$ olaun. Eğer v 'ye $M(G)$ 'de komşu olan tüm tepeler S 'de ise, o zaman $S_1 = S - \{v\}$ 'dir. Aksi halde yani v 'ye $M(G)$ 'de komşu olan tüm tepeler S 'de olmasın.

Durum 1. v tepesi ayrık baskın etmeye katkı sağlıyorsa;

$v \in S$, v 'nin tüm komşuları S 'de olmasın. En azından bir tane $e \in (\mathcal{M} - S)$ tepesi olsun. v tepesi $V(M(G)) - S$ 'deki bazı tepelerin ayrık baskın edebilmek için iki uzaklık olarak katkı sağlarsa

$$S_1 = (S \cup \{e\}) - \{v\} \text{ yapılmalı.}$$

$v \in S \implies v$ tepesi $V(M(G)) - S$ 'deki sadece komşusu olduğu tepeleri ayrık baskın etsin.

- v 'nin hiçbir komşusu S 'de değil. Bu durumda $S_1 = S - \{v\}$
- v 'nin en az bir komşusu S 'de ise bu durumda $S_1 = S - \{v\}$

Bu işlem sınırlı sayıda tekrarlanarak S_1 kümesi tanımlanmış olur.

Durum 2. v tepesi ayrık baskın etmek için katkı sağlamıyorsa;

$S_1 = S - \{v\}$ olduğu açıktır.

S kümesi sonlu küme olduğu için, bu işlem sonlu adımda sonlanacaktır. Böylece $S' = S_1$ kümesi tanımlanmış olur. $\square$

Lemma 3.2. $n \geq 3$ için G birleştirilmiş bir çizge olsun. $\exists v \in V(G)$ destek tepe olmasın ve $\deg_G(v) \geq 2$ olsun. O zaman;

$$\gamma_r^d(M(G - v)) \leq \gamma_r^d(M(G)) \leq \gamma_r^d(M(G - v)) + 1 \text{ olur.}$$

İspat: S kümesi $M(G - v)$ 'nin herhangi bir RDD -kümesi olsun. $w \in N_G(v)$ olsun. Bu durumda $\forall wv$ tepelerini ayrık baskın edebilmek için 3 durum söz konusudur.

Durum 1. Komşusu olan herhangi bir tepenin S kümesinde olması. Bu durumda iki alt durum söz konusu olur.

- *Alt Durum 1.1.* $w \in S$.
- *Alt Durum 1.2.* $t \in N_G(w)$ olacak şekilde $M(G - v)$ çizgesi için S kümesi oluşturulmaya çalışılır.

Böylece $M(G)$ 'de v tepesi *Alt Durum 1.1* veya *Alt Durum 1.2*'deki tepelere iki uzaklıkta olup $\deg_G(v) \geq 2$ olduğundan bunların sayısı en az ikidir.

Bu durumda S , $M(G)$ içinde bir RDD -kümesi olur.

Durum 2. wv tepesinin kendisi S kümesinde olursa, bu durumda S , $M(G)$ için de bir RDD -kümesi olur.

Durum 3. wv tepesi, $|N_2(wv, M(G - v))| \geq 2$ olacak şekilde ayrık baskın edilsin. Eğer iki uzaklık olan tepeler $x \neq v$ olmak üzere, wx şeklinde en az iki tepe S 'de ise, o zaman S , $M(G)$ içinde bir RDD -kümedir.

Eğer S 'de bu şekilde tepe yoksa, $S \cup \{wv\}$ kümesi $M(G)$ için bir RDD -kümedir. Sonuç olarak, yukarıdaki durumlardan;

$$\gamma_r^d(M(G)) \leq \gamma_r^d(M(G - v)) + 1 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi eşitsizliğin diğer tarafını gösterelim. Yani;

$$\gamma_r^d(M(G - v)) \leq \gamma_r^d(M(G)).$$

S kümesi $M(G)$ 'nin bir γ_r^d -kümesi olsun. Lemma 3.1'den $S \subseteq \mathcal{M}$ olduğunu kabul edelim. $S_v = N_{\leq 2}(v, M(G)) \cap S$ kümesini ele alalım. v tepesi ayrık baskın edilebilmesi için $|S_v| \geq 1$ olması gerekir. v destek tepe olmadığından $\deg_G(v) \geq 2$ 'dir, ayrıca $|N_2(v, G)| \geq 2$ 'dir. $w_1, w_2 \in N_G(v)$ ve $x_1, x_2 \in N_2(v, G)$

olsun. Bu durumda S_v 'deki tepeler $\{w_1v\}$ ya da $\{w_1x_1, w_2x_2\}$ şeklindeki tepelerdir. Buna göre iki durum söz konusudur.

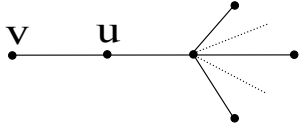
Durum 1. Eğer $w_1v \in S_v$ ise, $S_1 = S$ kümesi $M(G - v)$ çizgesi için RDD -kümedir.

Durum 2. Eğer $\{w_1x_1, w_2x_2\} \in S$ ise, o zaman $S_1 = S$ kümesi $M(G - v)$ çizgesi için bir RDD -kümedir.

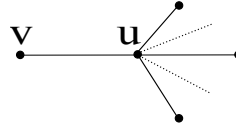
S_v 'deki her bir tepe yukarıdaki durumlardan hangisine uygun olursa olsun, S kümesi $M(G - v)$ çizgesi için bir RDD -küme olduğu kolayca görülür. $\square$

Sonuç 3.1. v bir pentant tepe ve u bir destek tepesi olsun. $N(v) = \{u\}$ ve S kümesi G çizgesinin bir γ_r^d -kümesi olsun. Eğer $\deg_G(u) > 2$ ise o zaman v tepesi S 'de olamaz. Aksi halde $v \in S$ olmalıdır.

Aşağıda gösterilen Şekil 3.3 örnek olarak gösterilmiştir.



(a) v tepesi S 'de olmalı



(b) v tepesi S 'de olmamalı

Şekil 3.3

Teorem 3.3. $n \geq 3$ tepeli bir yol çizge P_n 'nin orta çizgesi $M(P_n)$ 'nin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(M(P_n)) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ tür.

İspat: Yol çizgesin orta çizgesi olan $M(P_n)$ 'nin tepeler kümesini;
 $V(M(P_n)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada $V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$
ve $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$ olsun. Öncelikle $\gamma_r^d(M(P_n))$ için üst sınırı oluşturalım.

$$S = \bigcup_{i=0}^{\lceil \frac{n-1}{3} \rceil - 1} (n + 3i + 1) \text{ olmak üzere}$$

$|S| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ 'dir. Eğer $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise, o zaman $D = S \cup \{n - 1\}$ 'dir. Eğer $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise, o zaman $D = S \cup \{2n - 1\}$ 'dir. Aksi halde $D = S$ 'dir. $n \pmod{3}$ 'e bağlı tüm durumlarda D kümesi $M(P_n)$ çizgesinin bir RDD -kümesidir.

Ayrıca $n \equiv 2 \pmod{3}$ için $|D| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ ve diğer durumlarda $|D| = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$ elde edilir. Böylece

$$\gamma_r^d(M(P_n)) \leq |D| = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \text{ olur.}$$

Şimdi ise eşitsizliğin tersini ispatlamak için öncelikle, $T = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_t\}$ kümesi γ_r^d -kümesi olsun. $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_t$ ve $n + 1 \leq a_i \leq 2n - 1$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır. $x \neq t$ olacak şekilde $x \in \{1, \dots, (t - 1)\}$ için $f_x = a_{x+1} - a_x$ olsun. $x \neq t$ olacak şekilde $x \in \{1, \dots, (t - 1)\}$ için $f_x \leq 3$ olduğunu ispatlamalıyız. Tam olarak sadece bir x değeri için $f_x \geq 4$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmamak için $f_1 = 4$ olsun. Bu iddiamıza uygun olarak;

$$S' = \{4, (n + 1)\} \cup \bigcup_{i=0}^{\lceil \frac{n-5}{3} \rceil} (n + 3i + 5) \text{ elde edilir.}$$

$n \geq 7$ olduğunda eğer $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise, o zaman $D' = S' \cup \{(n - 1)\}$ 'dir. Böylece,

$$|D'| = \left\lceil \frac{n-5}{3} \right\rceil + 3 = \frac{n-4}{3} + 3 = \frac{n+5}{3} > \frac{n+2}{3}$$

elde edilir.

Bu ise $\gamma_r^d(M(P_n))$ üzerinde daha önce oluşturduğumuz üst sınır ile çelişir. O halde $f_x \leq 3$ olmalıdır. Bu durumda ,

$$\sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq 3(t - 1) \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

$a_1 = n + 1$ olduğu için;

$$\sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq a_t - (n + 1) \leq 3(t - 1) \text{ 'dir.}$$

Eğer $n \equiv 1 \pmod{3}$ veya $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise, o zaman $a_t = 2n - 1$ 'dir. Böylece,

$$n - 2 = \sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq 3(t - 1) \text{ ve buradan}$$

$$t \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda $|T| = t \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ olur. Bu ise,

$$\gamma_r^d(M(P_n)) \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil \text{ olmasını gerektirir.}$$

$n \equiv 0 \pmod{3}$ için yukarıda tanımladığımız T kümesinde $(n - 1)$ tepesi de vardır. Bu durumda T kümesini $T = T_1 \cup T_2$ şeklinde yazılır. Burada $T_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ ve $T_2 = \{(n - 1)\}$ 'dir. Böylece $|T| = t + 1$ olur. T_1 kümesi yukarıda tanımlanan küme olduğundan f_x fonksiyonumuz bu durumda $n \equiv 0 \pmod{3}$ için $a_t = 2n - 2$ olur. Böylece;

$$(2n - 2) - (n + 1) = \sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq 3(t - 1)$$

$$t \geq \frac{n}{3} \text{ elde edilir.}$$

$n \equiv 0 \pmod{3}$ için $|T| = t + 1 \geq \frac{n}{3} + 1 = \frac{n+3}{3}$ olur. Elde edilen alt ve üst sınırlardan

$$\gamma_r^d(M(P_n)) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil \text{ elde edilir.} \quad \square$$

Teorem 3.4. $n \geq 3$ tepeli bir çevre çizge C_n 'nin orta çizgesi $M(C_n)$ 'nin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(M(C_n)) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

İspat: Çevre çizgesin orta çizgesi olan $M(C_n)$ 'nin tepeler kümesini $V(M(C_n)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki parçaya ayırılım, burada $V_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $V_2 = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ olsun. Öncelikle $\gamma_r^d(M(C_n))$ için üst sınırı oluşturalım.

$$S = \bigcup_{i=0}^{\lceil \frac{n-2}{3} \rceil - 1} (n + 3i + 1) \text{ olmak üzere } |S| = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ dir.}$$

$n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$ ve $n \equiv 2 \pmod{3}$ tüm durumları için $D = S$ 'dir. $n \pmod{3}$ 'e bağlı tüm durumlarda D kümesi $M(C_n)$ çizgesinin RDD -kümesidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ için } D = S \text{ ve } |D| &= \frac{n}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ için } D = S \text{ ve } |D| &= \frac{n+2}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ için } D = S \text{ ve } |D| &= \frac{n+1}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$\gamma_r^d(M(C_n)) \leq |D| = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ olur.}$$

Şimdi ise eşitsizliğin tersini ispatlamak için öncelikle, $T = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ kümesi bir γ_r^d -kümesi olsun. $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_t$ ve $n+1 \leq a_i \leq 2n$ olacak şekilde pozitif tam sayılardır. $x \neq t$ olacak şekilde $x \in \{1, \dots, (t-1)\}$ için $f_x = a_{x+1} - a_x$ olsun. $x \neq t$ olacak şekilde $x \in \{1, \dots, (t-1)\}$ için $f_x \leq 3$ olduğunu ispatlamalıyız. Tam olarak sadece bir x için $f_x \geq 4$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmamak adına $f_1 = 4$ olsun. Bu iddiamıza uygun olarak;

$$S' = \{4, (n+1)\} \cup \bigcup_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-5}{3} \right\rceil - 1} (n+3i+5) \text{ elde ederiz.}$$

$n \geq 7$ olduğunda $n \equiv 1 \pmod{3}$ için $D' = S' \cup \{4\}$ olmalıdır. Böylece;

$$|D'| = \left\lceil \frac{n-5}{3} \right\rceil + 3 = \frac{n-4}{3} + 3 = \frac{n+5}{3} > \frac{n+1}{3} \text{ elde edilir.}$$

Bu ise $\gamma_r^d(M(C_n))$ üzerinde daha önce oluşturduğumuz üst sınır ile çelişir. O halde $f_x \leq 3$ olmalıdır.

Bu durumda;

$$\sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq 3(t-1) \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

$a_1 = n+1$ olduğu için;

$$\sum_{x=1}^{t-1} f_x \leq a_t - (n+1) \leq 3(t-1) \text{ 'dir.}$$

$n \equiv 0 \pmod{3}$, $a_t = 2n - 2$ ve $a_1 = n + 1$ için

$$2n - 2 - (n + 1) = \sum f_x \leq 3(t - 1)$$

$$n - 3 \leq 3(t - 1)$$

$$\frac{n}{3} \leq t \implies t = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$n \equiv 1 \pmod{3}$, $a_t = 2n$ ve $a_1 = n + 1$ için

$$2n - (n + 1) = \sum f_x \leq 3(t - 1)$$

$$n - 1 \leq 3(t - 1)$$

$$\frac{n + 2}{3} \leq t \implies t = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$n \equiv 2 \pmod{3}$, $a_t = 2n - 1$ ve $a_1 = n + 1$ için

$$2n - 1 - (n + 1) = \sum f_x \leq 3(t - 1)$$

$$n - 2 \leq 3(t - 1)$$

$$\frac{n + 1}{3} \leq t \implies t = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Sonuç olarak elde edilen alt ve üst sınırlardan

$$\gamma_r^d(M(C_n)) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ sonucuna ulaşırız.} \quad \square$$

Teorem 3.5. $G \cong W_{1,n-1}, K_{1,n-1}, K_n$ çizgelerinin orta çizgesi $M(G)$ olsun.

Bu durumda

$$\gamma_r^d(M(G)) = 2 \text{ 'dir.}$$

İspat: $M(G)$ çizgesinde $n - 1$ dereceli bir tepe yoktur. Bu yüzden $\gamma(M(G)) \neq 1$ 'dir. Bu durumda Teorem 2.13'ten $\gamma_r^d(M(G)) \geq 2$ olur.

Şimdi $\gamma_r^d(M(G)) \leq 2$ olduğunu gösterelim. S kümesi $M(G)$ çizgesinin RDD -kümesi olsun. $V(M(G)) = V(G) \cup \mathcal{M}$ burada $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathcal{M} = \{e_{ij} | v_i v_j \in E(G)\}$ 'dir.

$S = \{v_1, e_{12}\}$ olsun. Böylece S kümesi ile $M(G)$ 'deki tüm tepeler ayrık baskın edilmiş olur. Ayrıca $V(M(G)) - S$ 'deki tüm tepeler için ya $V(M(G)) - S$ 'de olan bir komşusu ya da $V(M(G)) - S$ 'de iki uzaklıkta olan iki tepe vardır. Dolayısı ile $\gamma_r^d(M(G)) \leq |S| = 2$ elde edilir. Alt ve üst sınırlardan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.6. $m, n \geq 2$ olmak üzere $G \cong K_{m,n}$ çizgesinin orta çizgesi $M(G)$ 'nin orta çizgesi $M(G)$ 'nin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı

$$\gamma_r^d(M(G)) = 2 \text{ 'dir.}$$

İspat: $M(G)$ çizgesinin tepe kümesi, $V(M(G)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde 3 parçaya ayrılabilir. Burada $V_1 = V_1^m \cup V_1^n = V(G)$ 'dir. V_2 tepe kümesi ise ayrık-tepelerin oluşturduğu kümedir. $V_2 = \{1(m+1), \dots, 1(m+n), \dots, m(m+1), \dots, m(m+n)\}$ 'dir. $M(G)$ 'de $\forall v \in V_1^m$ için $\deg_G(v) = n$, $\forall v \in V_1^n$ için $\deg_G(v) = m$ 'dir. $\forall v \in V_2$ için $\deg_G(v) = n+2$ 'dir. Ayrıca $M(G)$ çizgesi m tane K_n alt tam çizgesi içerir. Bu K_n çizgelerinin tepeleri V_2 kümelerinin tepeleridir. $M(G)$ 'deki tepelerin derece değerlerinden dolayı, $\gamma(M(G)) \neq 1$ 'dir. Bu durumda Teorem 2.13'ten $\gamma_r^d(M(G)) \geq 2$ olur.

Şimdi $\gamma_r^d(M(G)) \leq 2$ olduğunu gösterelim. S kümesi $M(G)$ 'nin bir RDD -kümesi olsun. Tepe kümeleri aralarındaki uzaklıklar dikkate alındığında ve Lemma 3.1'den $S \subset V_2$ olması gerektiği kolayca görülür.

Kabul edelim ki, $S = \{1(m+1), 1(m+2)\}$ olsun. Böylece S kümesi ile $M(G)$ 'deki tüm tepeler ayrık baskın edilmiş olur. Ayrıca $V(M(G) - S)$ 'deki tüm tepeler için ya $V(M(G) - S)$ 'de olan bir komşusu ya da $V(M(G) - S)$ 'de iki uzaklıkta olan iki tane tepe vardır. Dolayısı ile $\gamma_r^d(M(G)) \leq |S| = 2$ elde edilir.

Alt ve üst sınırlardan

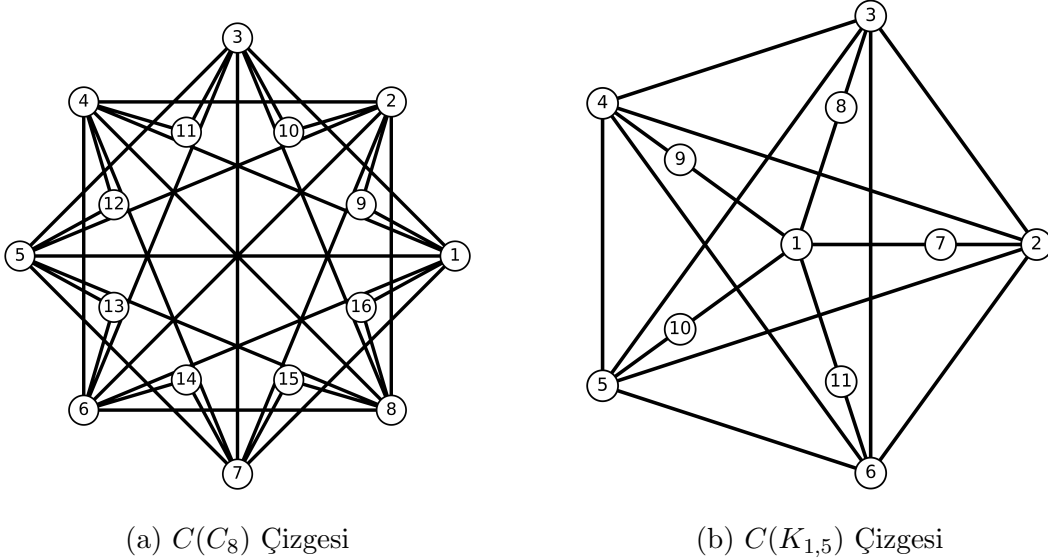
$$\gamma_r^d(M(G)) = 2 \text{ elde ederiz.}$$

$\square$

4 MERKEZİ ÇİZGELERİN KISITLI AYRIK BASKINLIK SAYISI

Bu bölümde merkezi çizgenin tanımı verilmiştir ve bazı bilinen çizgelerin merkezi çizgeleri oluşturulup kısıtlı ayrik baskınlık değeri hesaplanmıştır.

Tanım 4.1. [Vernold Vivin & Venkatakrishnan, 2008] Bir G çizgesinin merkezi çizgesi $C(G)$, G 'nin her ayritına yeni bir tepe eklenerek ve böylece verilen G çizgesinin daha öncekilerde bitişik olmayan her tepe çifti birleştirilerek elde edilir. Şekil 4.1'de $C(C_8)$ ve $C(K_{1,5})$ çizgeleri gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Farklı Çizgelerin Merkezi Çizge Gösterimleri

Teorem 4.1. G , n tepeli m ayrıtlı birleştirilmiş basit bir çizge olsun. Bu durumda merkezi çizge $C(G)$ 'nin kısıtlı ayrik baskınlık değeri;

$$\max \left\{ 2, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right\} \leq \gamma_r^d(C(G)) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

İspat: D kümesi $C(G)$ çizgesinin bir RDD -kümesi olsun. $D \subseteq V(C(G))$ olarak D kümesini $V(G)$ 'nin tepelerinden oluştuğunu kabul edelim. $C(G)$ 'nin oluşturulmasında her ayrıta yeni bir ayrıt-tepe eklendiği düşünüldüğünde, bu ayrıt-tepelerin en az bir komşusu D 'de olacak şekilde D 'yi oluşturalım. Bu

durumda $\lceil n/2 \rceil$ tane $V(G)$ 'nin tepesi D 'de olur.

Böylece yeni ayrıt-tepelerinin D 'deki komşusu ile, $(V(G) - D)$ 'deki diğer tepelerde ya komşusu ya da iki uzaklıkta en az iki tepe D 'de olduğundan ayrık baskın edilir. $(V(C(G)) - D)$ 'deki tepelerin de kısıtlı ayrık baskınlık şartını da sağladığı kolayca görülür. Böylece; G çizgesinin merkezi çizgesi $C(G)$ için

$$\gamma_r^d(C(G)) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ bulunur.}$$

Şimdi de alt sınırı kuralım. Her ayrıt-tepenin uçlarından en az biri D 'de olmalıdır. Yeni eklenen ayrıt tepelerinin kümesi S ise, o zaman $|S| = m$ 'dir. $\forall s_{uv} \in S$ için uçlardan en az biri D 'de olmalıdır. Aksi halde ayrık baskınlık koşulu sağlanmaz. Bu yüzden D 'de en az $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ tane tepe D 'de olmalıdır.

D çok küçük olursa, kabul edelim ki $|D| = 1$ olsun. Bunun olabilmesi ancak n tepeli $C(G)$ 'de $\deg_G(v) = n - 1$ olan tepenin olması ile mümkündür. Bu şekilde ise $C(G)$ 'nin tanımı mümkün değildir. Dolayısı ile $|D| \geq 2$ olmalıdır.

Sonuç olarak;

$$\gamma_r^d(C(G)) \geq \max \left\{ 2, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right\} \text{ olur.}$$

Böylece;

$$\max \left\{ 2, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right\} \leq \gamma_r^d(C(G)) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ elde edilir.} \quad \square$$

Teorem 4.2. $n \geq 3$ olmak üzere $G \cong P_n$ olsun. O zaman G çizgesinin merkez çizgesi olan $C(G)$ için $\gamma_r^d(C(G)) = 2$ olur.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ve $V_2 = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada, V_1 , G çizgesinin orijinal tepeleri iken, V_2 , G çizgesine yeni eklenen ayrıt tepelerinin kümeleri olsun.

- $\forall v \in V_1$, kendisi dışında $C(G)$ 'deki diğer tüm tepelere olan en kısa uzaklığı; $\forall u \in (V(C(G)) - v)$ için $d_G(u, v) \leq 2$ 'dir.
- $\forall v \in V_2$ için, V_2 kümesinde kendisi dışındaki diğer tüm tepelere olan en kısa uzaklığı $\forall u \in (V_2 - \{v\})$ için $d_G(u, v) \leq 3$ 'tür. V_1 kümesindeki tüm tepelere olan en kısa uzaklığı $\forall u \in V_1$ için $d_G(u, v) \leq 2$ 'dir.

D kümesi $C(G)$ çizgesinin bir RDD -kümesi olsun. Tepe çiftleri arasındaki en kısa uzaklıklar dikkate alındığında $|D| = 1$ olması imkansızdır. Dolayısıyla $|D| \geq 2$ 'dir.

Ayrıca $D \subset V_1$ olması gerektiği de kolayca görülür. Herhangi iki tepe $v_i, v_j \in V_1$ olsun. Eğer $D = \{v_i, v_j\}$ ise, o zaman $C(G)$ 'deki tüm tepeler ayrık bastırılmış olur. Bununla birlikte $(V(C(G)) - D)$ 'deki her tepenin ya komşusu ya da iki uzaklıkta olan herhangi iki tepe $(V(C(G)) - D)$ 'de mevcuttur. Böylece;

$$\gamma_r^d(C(G)) \leq |D| = 2 \text{ dir.}$$

Alt ve üst sınırlardan

$$\gamma_r^d(C(G)) = 2 \text{ elde edilir.}$$

□

Teorem 4.3. $n \geq 3$ olmak üzere $G \cong C_n$ olsun. O zaman G çizgesinin merkez çizgesi olan $C(G)$ için $\gamma_r^d(C(G)) = 2$ olur.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki parçaya ayrılabilir. Burada, $V_1 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ve $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ olsun.

- $\forall v \in V_1$ tepeleri, $C(G)$ 'deki diğer tüm u tepelerine en kısa uzaklığı; $d_G(u, v) \leq 2$ 'dir.
- $\forall v \in V_2$ tepeleri için, $C(G)$ 'deki diğer tüm u tepelerine en kısa uzaklığı; $d_G(u, v) \leq 3$ 'tür. Eğer $\exists u, v \in V_2$ ise, o zaman $d_G(u, v) = 3$ 'tür.

Bu durumda S kümesi $C(G)$ 'nin bir RDD -kümesi olsun. $diam(C(G)) = 3$ olduğundan, $|S| > 1$ olduğu kolayca görülür.

Kabul edelim ki; $\exists u, v \in V_1$ ve $S = \{u, v\}$ alalım. Bu durumda, S kümesi $C(G)$ için bir RDD -küme olur. Böylece $|S| \leq 2$ elde edilir. Alt ve üst sınırlardan, $C(G)$ çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık değeri $\gamma_r^d(C(G)) = 2$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.4. $G \cong K_n$ olacak şekilde, G çizgesinin merkez çizgesi $C(G)$ için kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(C(G)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ olur.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 = V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada, $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$ olsun.

- $\forall v \in V_1$ için v tepesinin kendisi dışındaki $C(G)$ 'deki diğer tüm u tepelerine olan en kısa uzaklığı $d_G(u, v) \leq 3$ 'tür.
- $V_1 \sim V_2$ için bazı tepeler arasındaki uzaklıklar $d_G(u, v) = 3$ 'tür. $\forall v \in V_2$ için v tepesinin kendisi dışındaki $C(G)$ 'deki diğer tüm u tepelerine olan en kısa uzaklığı; $d_G(u, v) \leq 4$ 'tür.

Eğer tepeler $V_2 \sim V_2$ olarak alınırsa, bazı tepe çiftleri için $d_G(u, v) = 4$ elde edilir. Bu durumda $diam(C(G)) = 4$ olur.

$G \cong K_n$ için minimum ayırıt-örtü sayısı $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 'dir. S kümesi G çizgesinin bir ayırıt-örtü kümesi olsun. D kümesi de $C(G)$ çizgesinin bir RDD -kümesi olsun. Eğer D kümesi, S 'deki her ayırıtın orta tepesi (yani $C(G)$ 'deki ayırıt tepe) alınırsa, $D, C(G)$ için bir RDD -küme olduğu kolayca görülür.

D kümesinin elemanları ayırıt-tepelerden oluşur. D kümesi S kümesine göre oluşturulduğundan, G 'deki yani V_1 'deki her tepenin D 'de en az bir tepeye komşudur.

Ayrıca, $\exists s \in (V_2 - D)$ tepesini ele alalım. Bu tepe V_1 'deki u ve v tepeleri ile ilişkili olsun. u tepesi S 'deki seçilen en az bir ayrıtla, v tepesi S 'deki seçilen farklı olmak üzere en az bir ayrıtla kapanır. Bu ise s tepesinin D 'de en az iki tane iki uzaklıkta olduğu tepenin olmasını gerektirir. Yani $\forall s \in (V_2 - D)$ tepesi için ayrık baskınlık şartı sağlanır.

$\forall u \in (V(C(G)) - D)$ tepenin $(V(C(G)) - D)$ 'de olan bir komşusu da vardır. Bu da seçtiğimiz D kümesinin ayrık baskınlık koşulunu sağladığını gösterir.

Sonuç olarak, D kümesi $C(G)$ için bir RDD -kümedir. Böylece

$$\gamma_r^d(C(G)) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ elde edilir.}$$

Şimdi alt sınırı bulalım. D herhangi bir γ_r^d -küme olsun. Eğer $x \in V_1$ ve $x \in D$ olan bir tepe varsa, D kümesinin boyutunu artırmadan yalnızca V_2 kümesindeki tepelerden oluşan bir RDD küme elde edebiliriz. Çünkü $y \notin D$ ve $y \in V_1$ olan $xy \in E(G)$ ayrıtının ayrıt-tepesi s_{xy} ile x tepesini değiştirirsek ayrık baskınlık ve kısıtlı baskınlık özelliği korunur. Böylece V_1 kümesinde olan D 'deki tüm tepeler adım adım çıkartıp ayrıt-tepeler ile değiştirebiliriz. Bu durumda $D \subseteq V_2$ olur. $\forall s \in D$ en fazla V_1 'deki iki tepe ile komşudur. Dolayısı ile D kümesi V_1 'deki tüm tepelerin ayrık baskın oluşunu komşuluk ile garantilemek istersek V_2 'deki en az $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ tane ayrıt-tepe gerekir.

Böylece her RDD -küme'nin büyüklüğü en az $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ olur. Sonuç olarak $\gamma_r^d(C(G)) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ elde edilir. Alt ve üst sınırlardan;

$$\gamma_r^d(C(G)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ olur.} \quad \square$$

Teorem 4.5. $G \cong K_{1,n}$ yıldız çizgesi olsun. $C(G)$ merkez çizgesi için kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(C(G)) = 2$ 'dir.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada, $V_1 = V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $V_2 = \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$ yani ayrıt-tepeler kümesi olsun.

- $\forall v \in V_1$ olsun. Eğer $v = 1$, G çizgesinin merkez tepesi ise; o zaman $\forall u \in V_2$ için $d_G(u, v) = 1$ ve $\forall u \in V_1$ için $d_G(u, v) = 2$ 'dir.
Eğer $\forall v \in (V_1 - \{1\})$ ise, o zaman $\forall u \in (V_1 - \{1\})$ için $d_G(u, v) = 1$ ve $\forall u \in V_2$ için $d_G(v, u) \leq 2$ 'dir.
- $\forall v \in V_2$ olsun.
Eğer $\forall u \in (V_2 - \{v\})$ ise, o zaman $d_G(u, v) = 2$ dir.
Eğer $\forall u \in V_1$ ise, $d_G(u, v) \leq 2$ elde edilir.

Dolayısı ile $diam(C(G)) = 2$ 'dir. D kümesi $C(G)$ çizgesinin bir RDD -kümesi olsun. $diam(C(G)) = 2$ olduğundan $|D| > 1$ olması zorunludur.

$\exists i, j \in V_1$ olmak üzere $D = \{i, j\}$ alalım. Bu durumda $C(G)$ 'deki tüm tepelerin ayrık baskın edildiği kolayca görülür. Ayrıca $(V(C(G)) - D)$ 'deki her tepenin komşusu yine bu kümededir.

Böylece D kümesi $C(G)$ için bir RDD -kümesi olsun. Bu ise, $\gamma_r^d(C(G)) \leq |D| = 2$ olmasını gerektirir.

Alt ve üst sınırlardan

$$\gamma_r^d(C(G)) = 2 \text{ elde edilir.}$$

□

Teorem 4.6. $n \geq 5$ için $G \cong W_n$ çizgesinin $C(G)$ merkez çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(C(G)) = 3$ 'tür.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki parçaya ayıralım. Burada, $V_1 = V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere V_1 , G çizgesinin orijinal tepeleridir. Dolayısıyla, $\{1\}$ tepesi G çizgesinin merkez

tepesidir. $V_2 = V_3 \cup V_4 = \{n+1, \dots, 2n-1\} \cup \{2n, \dots, 3n-1\}$ şeklinde iki parçaya ayıralım. V_2 tepe kümesi G çizgesine eklenen ayırıt-tepelerdir. Burada, V_3 tepe kümesi çevre çizge üzerine eklenen ayırıt-tepeleri ve V_4 tepe kümesi ise merkez tepe ve çevre çizgenin arasında kalan ayırıt-tepeleri gösterebilir.

- $\forall v \in V_1$ olsun.
 $\forall u \in (V_1 - \{v\})$ için $d_G(v, u) \leq 2$ 'dir.
 $\forall u \in V_2$ için $d_G(v, u) \leq 3$ 'tür.
- $\forall v \in V_2$ olsun.
 $\forall u \in (V_2 - \{v\})$ için $d_G(v, u) \leq 3$.
 $\forall u \in V_1$ için $d_G(v, u) \leq 3$ 'tür.

Dolayısı ile $\text{diam}(C(G)) = 3$ 'tür. D kümesi $C(G)$ çizgesinin herhangi bir RDD -kümesi olsun. Çizgenin çapından dolayı $|D| > 1$ olduğu kolayca görülür. Kabul edelim ki, $|D| = 2$ olsun. Aşağıdaki iki durum olabilecek tüm olasılıkları kapsar.

Durum 1. $D \not\subset V_4$ olsun. Yani D kümesinde V_4 'ten hiçbir tepe bulunmasın. Bu durumda $\{1\} \in V_1$ merkez tepeli ayırık baskın edebilmek için $\{1\}$ tepesine iki uzaklıkta olan iki tane V_1 kümesinde olan tepe D 'de olmalıdır. Yada D 'deki tepelerden biri 1 merkez tepesi olmalıdır.

- V_1 'deki herhangi iki tane tepe D 'de olsun. Bu tepeler G 'de ister komşu olsun, ister komşu olmasın. Her iki seçim için de, $(V(C(G)) - D)$ 'de ayırık baskın edilmeyen tepeler kalır. Bu tepeler V_4 kümesindeki bazı tepelerdir.
- $\{1\} \in D$ ve $\{v\} \in V_1$ olsun. Bu durumda V_2 kümesindeki bazı tepeler ayırık baskın edilemez. $\{1\} \in D$ ve $\{v\} \in V_2$ olsun. Bu durumda da V_2 kümesindeki bazı tepeler ayırık baskın edilemez.

Durum 2. D içinde en az bir tepe $u \in V_4$ olsun.

- $v \in D$ ve $v \in V_1$ ise, bu durumda V_2 kümesindeki bazı tepeler ayırık baskın edilemez.

- $v \in D$ ve $v \in V_3$ ise, bu durumda bazı $C(G)$ tepeleri ayrık baskın edilemez.
- $v \in D$ ve $v \in V_4$ ise, V_1 ve V_2 kümelerindeki bazı tepeler ayrık baskın edilemez.

Dolayısı ile yukarıdaki her iki durum için $|D| = 2$ olması imkansızdır. $|D| \geq 3$ olması gerekmektedir.

Üst sınır için, kabul edelim ki $D = \{1, u, v\}$, $u, v \in V_1$ olsun. $\{u, v\}$ tepelerinin V_4 kümesindeki bazı tepeler hariç tüm tepeleri ayrık baskın ettiğini *Durum 1*'de gösterdik. $\{1\} \in D$ tepesi de V_4 'teki tüm tepelere komşu olduğundan, D kümesi $C(G)$ 'nin herhangi bir RDD -kümesi olur. Böylece $\gamma_r^d(C(G)) \leq 3$ elde edilir.

Alt ve üst sınırlardan;

$$\gamma_r^d(C(G)) = 3 \text{ elde edilir.} \quad \square$$

Teorem 4.7. $G \cong K_{m,n}$ iki parçalı tam çizge olsun. $m, n \geq 2$ için $C(G)$ merkez çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı $\gamma_r^d(C(G)) = 2$ 'dir.

İspat: $C(G)$ çizgesinin tepe kümesi $V(C(G)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde üç parçaya ayırılım. Burada, $V(G) = V_1 \cup V_2$ olup $V_1 = \{1, 2, \dots, m\}$, $V_2 = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$ ile, V_3 tepe kümesini ise, $V_3 = \{m+n+1, \dots, m+n+mn\}$ şeklinde etiketliyelim.

- $\forall v \in V_1$ olsun.
 $\forall u \in (V_1 - \{v\})$ için $d_G(u, v) = 1$ 'dir.
 $\forall u \in V_2$ için $d_G(u, v) = 2$ 'dir.
 $\forall u \in V_3$ için $d_G(u, v) \leq 2$ elde edilir.
- $\forall v \in V_2$ olsun.
 $\forall u \in (V_2 - \{v\})$ için $d_G(u, v) = 1$ 'dir.

$\forall u \in V_1$ için $d_G(u, v) = 2$ 'dir.

$\forall u \in V_3$ için $d_G(u, v) \leq 2$ bulunur.

- $\forall v \in V_3$ olsun.

$\forall u \in (V_3 - \{v\})$ için $d_G(u, v) \leq 3$ 'tür.

$\forall u \in V_1$ için $d_G(u, v) \leq 2$ 'dir.

$\forall u \in V_2$ için $d_G(u, v) \leq 2$ elde edilir.

Dolayısı ile $diam(C(G)) = 3$ elde edilir. D kümesi $C(G)$ 'nin herhangi bir RDD -kümesi olsun. $|D| > 1$ olması gerektiği kolayca görülür.

Kabul edelim ki, $D \subset V_1$ ve $u, v \in V_1$ olacak şekilde $D = \{u, v\}$ olsun. Yukarıda incelediğimiz tepe çiftleri arasındaki en kısa uzaklık değerlerine göre; $(V(C(G)) - D)$ 'deki tüm tepeler D 'deki ya komşusu ya da iki uzaklıktaki iki tane tepe ile ayrık baskın edilir. Ayrıca $(V(C(G)) - D)$ 'deki tüm tepeler kısıtlılık şartını da sağlar. Böylece $\gamma_r^d(C(G)) \leq 2$ elde edilir.

Alt ve üst sınırlardan;

$$\gamma_r^d(C(G)) = 2 \text{ olur.}$$

□

5 ALTIGEN KAKTÜS ZİNCİRLERİNDE KISITLI AYRIK BASKINLIK SAYISI

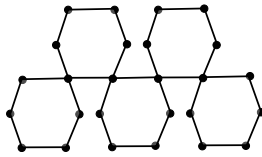
Bu bölümde altıgen kaktüs çizgelerinin tanımları verilmiştir ve bazı bilinen altıgen kaktüs zincirleri L_n , M_n ve O_n 'nin kısıtlı ayrik baskınlık değerleri hesaplanmıştır. Kaktüs zincirleri üzerindeki baskınlık çalışmaları, literatürde [Bermudo et al., 2022, Majstorović et al., 2016, Mihajlov Carević, 2022, Mojdeh et al., 2018] gibi çalışmalarla geniş bir yer tutmaktadır.

Tanım 5.1. [Turacı, 2018] *Kaktüs çizgesi, hiçbir ayrıtının birden fazla çevrede yer almadığı bağlantılı bir çizgedir.*

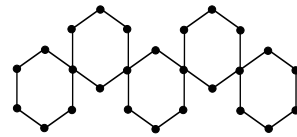
Tanım 5.2. [Turacı, 2018] *Altıgen kaktüs G yalnızca altı tepeli çevrelerden, yani altıgenlerden oluşan bir kaktüs çizgesidir.*

Tanım 5.3. [Turacı, 2018] *G 'deki her altıgenin en fazla iki kesme tepesi vardır ve her kesim tepe tam olarak iki altıgen tarafından paylaşılır; bu durumda G 'ye altıgen kaktüs zinciri deriz. G çizgesindeki altıgen sayısı zincir veya blok uzunluğu olarak adlandırılır. Uzunluğu n olan bir kaktüs zincir çizgesi $G^n = C^1 C^2 C^3 \dots C^n$ şeklinde yazılır.*

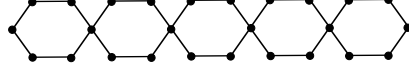
Aşağıda Şekil ??'de Ortho, Meta ve Para altıgen kaktüs zincirler çeşitleri ile ilgili örnek şekil gösterilmiştir.



(a) O_5 Ortho-Altıgen



(b) M_5 Meta-Altıgen

(c) L_5 Para-Altıgen

Şekil 5.1: Altıgen Kaktüs Zincir Çeşitleri

Tanım 5.4. [Turacı, 2018] Bir altıgen kaktüs zincir çizgesinde kesim tepeler komşu ise Ortho-altıgen kaktüs zincir çizgesi olarak aldlandırılır. O_n olarak gösterilir.

Tanım 5.5. [Turacı, 2018] Bir altıgen kaktüs zincir çizgesinde kesim tepeler arası mesafe iki ise Meta-altıgen kaktüs zincir çizgesi olarak aldlandırılır. M_n olarak gösterilir.

Tanım 5.6. [Turacı, 2018] Bir altıgen kaktüs zincir çizgesinde kesim tepeler arası mesafe üç ise Para-altıgen kaktüs zincir çizgesi olarak aldlandırılır. L_n olarak gösterilir.

Lemma 5.1. $C^1, C^2, \dots, C^n$ bloklarına sahip bir para-altıgen kaktüs zincir L_n olsun. Eğer S , L_n 'nin herhangi bir RDD-kümesi ise, o zaman her C^i bloğu için $S \cap V(C^i) \neq \emptyset$ 'dir.

İspat: Para-altıgen kaktüs zincir L_n 'nin herhangi bir keyfi bloğuna C^i diyelim ve kabul edelim ki $S \cap V(C^i) = \emptyset$ olsun.

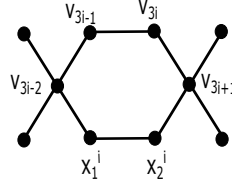
L_n 'de her blok komşu bloklarına tek kesim tepe ile bağlıdır. $C^i \cong C_6$ üzerinde, kesim tepeye en uzak olan tepelerden bir tanesini seçelim. Bu tepe v olsun. Bu v tepesi, komşu bloklardaki hiç bir tepeye komşu değildir. v tepesinden komşu bloklardaki herhangi bir tepeye giden her yol mutlaka kesim tepeden geçer. Bu nedenle komşu blokta v tepesine iki uzaklıkta olan sadece

kesim tepenin komşularıdır. $S \cap V(C^i) = \emptyset$ olduğundan, v tepesi ayrık baskın edilemez. Dolayısı ile bu bir çelişkidir. İspatın başındaki $S \cap V(C^i) = \emptyset$ kabulümüz yanlıştır.

Sonuç olarak, S kümesi her bloğun en az bir tepesini içermelidir. Yani $\forall i, S \cap V(C^i) \neq \emptyset$ olmalıdır. $\square$

Teorem 5.2. $n \geq 5$ için L_n para-altıgen kaktüs zincir çizgesi olsun. L_n para-altıgen kaktüs zincir çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık sayısı, $\gamma_r^d(L_n) = n+1$ 'dir.

İspat: L_n çizgesini Şekil 5.2'deki gibi etiketleyelim.



Şekil 5.2: L_n Etiketli Çizgesi

S kümesi L_n çizgesinin herhangi bir RDD -kümesi olsun. Lemma 5.1'den $|S| = n$ olsun. Bu durumda S kümesi her C^i bloğunun bir tepesini içermektedir. Bu durumda C_1 ve C_n bloklarındaki bazı tepeleri ayrık baskın etmek mümkün değildir. Bu durum çelişkidir. Dolayısı ile $|S| = n$ olduğunda, L_n çizgesindeki tüm tepeler ayrık baskın edilemez. Böylece $|S| \geq n+1$ olmalıdır. Bu ise $\gamma_r^d(L_n) \geq n+1$ olmasını gerektirir.

Şimdi L_n çizgesinin $\gamma_r^d(L_n)$ değerinin üst sınırını oluşturalım. Kabul edelim ki D kümesi L_n çizgesinin herhangi bir RDD -kümesi ve $D = \{v_{3i-2} | i = \{1, \dots, n\}\} \cup \{v_{3n+1}\}$ olsun. Bu durumda D kümesi ile L_n çizgesindeki tüm tepeleri ayrık baskın edilir. Ayrıca $\forall u \in (V(L_n) - D)$ 'deki her tepenin ya komşusu ya da iki uzaklıkta olan 2 adet tepesi yine $(V(L_n) - D)$ 'dir.

Doalyısı ile D kümesi ile kısıtlı baskınlık şartı da sağlanmaktadır. Böylece;
 $\gamma_r^d(L_n) \leq |D| = n + 1$ elde edilir.

Alt ve üst sınırlardan, L_n çizgesinin kısıtlı ayırık baskınlık sayısı değeri

$$\gamma_r^d(L_n) = n + 1 \text{ olur.} \quad \square$$

Lemma 5.3. $C^1, C^2, \dots, C_n$ bloklarına sahip bir meta – altıgen kaktüs zincir M_n olsun. Eğer S , M_n çizgesinin herhangi bir RDD-kümesi ise, o zaman her C^i bloğu için $S \cap V(C^i) \neq \emptyset$ ’dir.

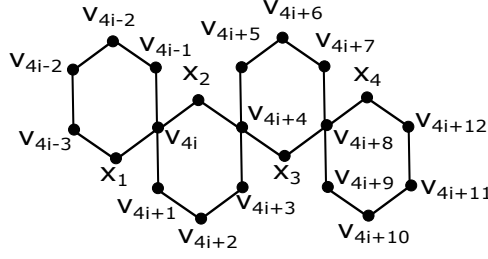
İspat: Meta-altıgen kaktüs zincir M_n çizgesinin herhangi keyfi bir bloğuna C^i diyelim ve kabul edelim ki, $S \cap V(C^i) = \emptyset$ olsun. M_n çizgesinde, her blok komşu olduğu bloklara bir kesim tepe aracılığı ile bağlıdır.

$C^i \cong C_6$ üzerinde, kesim tepeye en uzak olan tepayı seçelim. Bu tepe v olsun. Bu v tepesi komşu bloklardaki hiç bir tepeye komşu değildir. v tepesinden başka bir bloktaki herhangi bir tepeye giden her yol mutlaka kesim tepeden geçer. Bu nedense komşu blokta v tepesine iki uzaklıkta komşu olan ya kesim tepenin kendisidir, ya da eğer seçilen v tepesi C^1 yada C^n bloklarında ise; kesim tepenin yine aynı blokta olan komşularıdır. $S \cap V(C^i) = \emptyset$ olduğundan, v tepesi ayırık baskın edilemez. Dolayısı ile bu bir çelişkidir. İspat başındaki $S \cap V(C^i) = \emptyset$ kabulümüz yanlıştır.

Sonuç olarak, S kümesi, her bloğun en az bir tepesini içermelidir. Yani

$$\forall i, i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } S \cap V(C^i) \neq \emptyset \text{ olmalıdır.} \quad \square$$

Teorem 5.4. $n \geq 5$ için M_n meta-altıgen kaktüs zincir çizgesi olsun. M_n para-altıgen kaktüs zincir çizgesinin kısıtlı ayırık baskınlık sayısı, $\gamma_r^d(M_n) = n + 1$ ’dir.

Şekil 5.3: M_n Etiketli Çizgesi

İspat: M_n çizgesinin tepelerini Şekil 5.3'teki gibi etiketleyelim.

Lemma 5.3'ten $|S| \geq n$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki, $|S| = n$ olsun. Bu durumda S kümesi her C^i bloğunun bir tepesini içermektedir. Bu durumda C^1 ve C^n bloklarındaki bazı tepeleri ayırık baskın yapmak mümkün değildir. Bu durum çelişkidir. Dolayısı ile $|S| = n$ olduğunda, M_n çizgesindeki tüm tepeler ayırık baskın edilemez. Böylece $|S| \geq n + 1$ olmalıdır. Bu ise $\gamma_r^d(M_n) \geq n + 1$ olmasını gerektirir.

Şimdi M_n çizgesinin $\gamma_r^d(M_n)$ değerinin üst sınırını oluşturalım. Kabul edelim ki, D kümesi M_n çizgesinin bir RDD -kümesi olsun ve $D = \{v_{4i-3} | i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{v_{4n+1}\}$ olsun. Bu durumda D kümesi ile M_n çizgesindeki tüm tepelerin ayırık baskın olduğu görülür. Ayrıca $\forall u \in (V(M_n) - D)$ 'deki her tepenin ya komşusu ya da iki uzaklıkta olan 2 tane tepesi yine $(V(M_n) - D)$ 'dedir. Dolayısı ile D kümesi ile kısıtlı baskınlık şartı da sağlanmaktadır. Böylece $\gamma_r^d(M_n) \leq |D| = n + 1$ elde edilir.

Alt ve üst sınırlardan, M_n çizgesinin kısıtlı ayırık baskınlık değeri $\gamma_r^d(M_n) = n + 1$ olur. $\square$

Lemma 5.5. $C^1, C^2, \dots, C^n$ bloklarına sahip bir Ortho-zincir altıgen kaktüs O_n olsun. Eğer S , O_n çizgesinin herhangi bir RDD -kümesi ise, o zaman her

C^i blokları için $S \cap V(C^i) \neq \emptyset$ 'dir.

İspat: *Ortho-zincir altıgen kaktüs zincir* O_n çizgesinin herhangi bir keyfi bloğuna C^i diyelim. Ve kabul edelim ki $S \cap V(C^i) = \emptyset$ olsun. O_n çizgesinde her blok komşu bloğa bir kesim tepe ile bağlıdır.

$C^i \cong C_6$ üzerinde, kesim tepeye en uzak olan tepelerden birini seçelim. Bu tepe v olsun. Bu v tepesi komşu bloklardaki hiç bir tepeye komşu değildir ve v tepesinden komşu bloklardaki herhangi bir tepeye giden yol mutlaka kesim tepeden geçer. Bu nedenle komşu blokta v tepesine iki uzaklıkta yalnızca kesim tepe ve v tepesinin kendi bloğundaki başka bir tepe vardır.

$S \cap V(C^i) = \emptyset$ olduğundan, v tepesi ayrıık baskın edilemez. Dolayısı ile bu bir çelişkidir. İspatın başındaki $S \cap V(C^i) = \emptyset$ kabülümüz yanlıştır.

Sonuç olarak, S kümesi, her bloğun en az bir tepesini içermelidir. Yani $\forall i$ için $S \cap V(C^i) \neq \emptyset$ olmalıdır. $\square$

Teorem 5.6. $n \geq 5$ için O_n ortho-zincir altıgen kaktüs çizgesinin kısıtlı ayrıık baskınlık sayısı, $\gamma_r^d(O_n) = n + 2$ 'dir.

İspat: S kümesi $n \geq 5$ için O_n çizgesinin herhangi bir RDD -kümesi olsun. Öncelikle S kümesinin alt sınırını oluşturmaya çalışalım.

Kabul edelimki, $|S| = n$ olsun. Lemma 5.5'ten biliyoruz ki bu durumda S kümesi her C^i bloğunun bir tepesini içermektedir. Bu durumda her C^i bloğundaki bazı tepeleri ayrıık baskın etmek mümkün olmaz. Dolayısı ile bu bir çelişkidir.

Şuanki varsayımımız ise $|S| = n + 1$ olsun. Bu durumda ise C_1 ve C_n bloklarındaki bazı tepeleri ayrıık baskın etmek mümkün olmaz. Dolayısı ile $|S| = n + 1$ olduğunda, O_n 'deki tüm tepeler ayrıık baskın edilemeyecektir. Böylece $|S| \geq n + 2$ olması gerektiğini ispat etmiş olduk. Bu da $\gamma_r^d(O_n) \geq n + 2$ olmasını gerektirir.

Şimdi ise O_n çizgesinin $\gamma_r^d(O_n)$ değerinin üst sınırını oluşturalım. Kabul edelim ki, D kümesi O_n 'nin herhangi bir RDD -kümesi olsun ve $D = \{v_{4i-3} | i \in \{1, \dots, n+1\} \cup v_{4(n+2)-2}\}$ olsun. Bu durumda D kümesi ile O_n 'deki tüm tepelerin ayrık baskın edildiği görülür. Ayrıca $\forall u \in (V(O_n) - D)$ 'deki her tepenin ya komşusu ya da iki uzaklıkta olan iki tane tepesi yine $(V(O_n) - D)$ 'dedir. Dolayısı ile D kümesi ile kısıtlılık şartı sağlanmaktadır. Böylece

$$\gamma_r^d(O_n) \leq |D| = n + 2 \text{ elde edilir.}$$

Alt ve üst sınırlardan O_n çizgesinin kısıtlı ayrık baskınlık değeri yani $\gamma_r^d(O_n)$, $n \geq 5$ için $\gamma_r^d(O_n) = n + 2$ olur. $\square$

6 ALGORİTMA

Bu bölümde, herhangi bir G çizgesi üzerinde kısıtlı ayrık baskınlık sayısını $(\gamma_r^d(G))$ ve bu değeri sağlayan minimum kümeleri belirlemek için tasarlanan algoritma ve sözde kodu (pseudocode) sunulmuştur.

Bu algoritma, verilen bir G çizgesinin köşelerinden oluşturulabilecek tüm olası alt kümeleri (power set) tek tek deneyerek çalışan ”kaba kuvvet” (brute-force) temelli bir arama yöntemidir. Algoritma, her bir aday küme S için iki aşamalı bir doğrulama süreci işletir:

İlk olarak, küme dışındaki her tepenin S tarafından ya doğrudan komşulukla ya da iki birim uzaklıktaki en az iki tepe ile kapsanıp kapsanmadığını (Ayrık Baskınlık) kontrol eder. İkinci olarak, küme dışında kalan yapının izole tepe barındırmadığını, yani kendi içinde tutarlı olduğunu (Kısıtlılık) doğrular. Her iki koşulu da sağlayan kümeler arasından eleman sayısı en az olanı hafızada tutarak, sürecin sonunda minimum kardinaliteyi $\gamma_r^d(G)$ ve bu sayıyı sağlayan çözüm kümelerini döndürür. Bu algoritmanın zaman karmaşıklığı $O(2^n n^3)$ yada kısaca $O^*(2^n)$ 'dir.

Algoritma 1: Minimum Kısıtlı Ayrık Baskın Küme Bulma Algoritması**Girdi:** Bir $G = (V, E)$ çizgesi**Çıktı:** Minimum Kısıtlı Ayrık Baskınlık Sayısı $\gamma_r^d(G)$ ve Kümeleri

```

1   $MinSets \leftarrow \emptyset$ ;
2   $min\_size \leftarrow |V| + 1$ ;
3  Her  $S \subseteq V$  (tüm alt kümeler üzerinde) için
4       $is\_disjunctive \leftarrow$ ;
5       $is\_restrained \leftarrow$ ;
6       $V_{diff} \leftarrow V \setminus S$ ;
7      /* 1. Adım: Ayrık Baskınlık Kontrolü */
8      Her  $v \in V_{diff}$  için
9           $N(v) \cap S$  boş mu? ve  $|\{u \in S : \text{dist}(v, u) = 2\}| < 2$  mi?;
10         Eğer evet ise
11              $is\_disjunctive \leftarrow$ ;
12             break;
13     Eğer  $is\_disjunctive$  ise
14         /* 2. Adım: Kısıtlılık Kontrolü (V-S'de izole tepe yok) */
15         Eğer  $V_{diff} \neq \emptyset$  ise
16             Her  $v \in V_{diff}$  için
17                 Eğer  $N(v) \cap V_{diff} = \emptyset$  ise
18                      $is\_restrained \leftarrow$ ;
19                     break;
20         /* Kayıt İşlemleri */
21         Eğer  $is\_restrained$  ise
22             Eğer  $|S| < min\_size$  ise
23                  $min\_size \leftarrow |S|$ ;
24                  $MinSets \leftarrow \{S\}$ ;
25             değilse ise  $|S| = min\_size$  ise
26                  $MinSets \leftarrow MinSets \cup \{S\}$ ;

```


7 SONUÇ

Çizge teorisindeki baskınlık kavramı; iletişim ağlarının tasarımı, sosyal ağ analizleri, kaynak optimizasyonu ve tesis yerleşimi problemlerinde etkin bir modelleme aracı olarak kullanılmaktadır. Bu alanda araştırmacıların ilgisini çeken ve stratejik öneme sahip güncel parametrelerden biri de kısıtlı ayırık baskınlık sayısıdır. Bu parametrenin, hem tepelerin etki alanını genişletmesi (ayırık baskınlık) hem de baskın olmayan kümenin izole kalmamasını sağlaması (kısıtlılık) açısından özel çizge yapıları üzerindeki davranışı araştırmamızın temel motivasyonunu oluşturmuştur.

Bu tez çalışmasında, kısıtlı ayırık baskınlık sayısının temel ve türetilmiş çizgeler üzerindeki sonuçları kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. İlk olarak P_n , C_n , $W_{1,n}$, $K_{1,n}$, K_n ve $K_{m,n}$ gibi yaygın olarak kullanılan temel çizge sınıfları ele alınmış; ardından bu çizgelerin yapısal dönüşümleri olan Orta Çizgeler ($M(G)$) ve Merkezi Çizgeler ($C(G)$) üzerinde genel sonuçlar elde edilmiştir.

Literatürde yer alan temel çizge yapılarının ötesine geçilerek, özellikle kimyasal çizge teorisinde ve moleküler modellemelerde önemli bir yere sahip olan altıgen kaktüs zincirleri incelenmiştir. Ortho, Meta ve Para altıgen kaktüs zincirleri (O_n , M_n , L_n) için kısıtlı ayırık baskınlık sayıları, zincir uzunluğuna bağlı olarak formülüze edilmiş ve ispatları gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen teorik sonuçlara ek olarak, herhangi bir çizge üzerinde bu parametrenin hesaplanabilirliğini göstermek amacıyla bir algoritma tasarlanmış ve sözde kodu sunulmuştur. Bu çalışma ile incelenen çizge sınıfları için kısıtlı ayırık baskınlık sayılarına dair kesin değerler ve sınırlar matematiksel ispatlarla doğrulanarak literatüre sunulmuştur.

Kaynaklar

- Bermudo, S., Higuera, R. A., & Rada, J. (2022). k -domination and total k -domination numbers in catacondensed hexagonal systems. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19(7), 7138–7155.
- Buckley, F., & Harary, F. (1990). *Distance in Graphs*. Addison–Wesley Publishing Company, Redwood City.
- Cockayne, E., & Hedetniemi, S. (1977). Towards a theory of domination in graphs. *Networks*, 7(3), 247–261.
- Domke, G. S., Hattingh, J. H., Hedetniemi, S. T., Laskar, R. C., & Markus, L. R. (1999). Restrained domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 203, 61–69.
- Goddard, W., Henning, M. A., & McPillan, C. A. (2014). The disjunctive domination number of a graph. *Quaestiones Mathematicae*, 37, 547–561.
- Hamada, T., & Yoshimura, I. (1976). Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. *Discrete Mathematics*, 14(3), 247–251.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., & Slater, P. J. (1998). *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., & Henning, M. A. (Eds.). (2021). *Structures of Domination in Graphs*. Developments in Mathematics (Vol. 66). Springer, Cham.
- Jamil, F., & Malalay, R. (2019). On disjunctive domination in graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 43, 149–168.
- Majstorović, S., Klobučar, A., & Došlić, T. (2016). Domination numbers of m -cactus chains. *Ars Combinatoria*, 125, 11–22.
- Malalay, R. P., & Jamil, F. P. (2022). Restrained disjunctive domination in graphs under some binary operations. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15(1), 207–223.

- Mihajlov Carević, M. (2022). Domination on cactus chains of pentagons. *Vojnotehnicki glasnik/Military Technical Courier*, 70(3), 583–597.
- Mojdeh, D. A., Habibi, M., & Badakhshian, L. (2018). Total and connected domination in chemical graphs. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 39, 393–401.
- Newman, M. E. J. (2010). *Networks: An Introduction*. Oxford University Press.
- Ore, O. (1962). *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Chicago.
- Turacı, T. (2018). On vulnerability of the hexagonal cactus chains. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 8(1), 84–88.
- Vernold Vivin, J., & Venkatakrishnan, M. (2008). On the central graph of a graph. *Proceedings of the International Conference on Mathematics and Computer Science*, Loyola College, Chennai, 146–148.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasından sonuçlandırılmasına kadar geçen süreçte, engin bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, akademik ilgi alanlarımın şekillenmesinde büyük rol oynayan ve her aşamada yakın ilgi ve desteğini hissettiğim değerli danışman hocam Sayın **Prof. Dr. Aysun AYTAÇ**'a en derin şükranlarımı sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, bana olan inançlarıyla her zaman yanımda duran, bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan kıymetli annem **Suzan ÇOLAK** ve babam **Abdülrezak ÇOLAK**'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

../../2026

İmzası

Ahmet Çolak

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Çolak, 1999 yılında İzmir’de doğdu. Lise öğrenimini Suphi Koyuncuoğlu Anadolu Lisesi’nde tamamladıktan sonra, lisans eğitimini İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü’nde tamamladı. Matematiksel altyapısını bilgisayar bilimleri ile birleştirme hedefiyle, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı.

Eğitimi süresince Çizge Teorisi (Graph Theory), Yapay Zeka, Makine Öğrenmesi ve Büyük Dil Modelleri (LLM) üzerine yoğunlaştı. Özellikle baskınlık teorisi ve kısıtlı ayrık baskınlık konularında akademik araştırmalar yürüttü.